

Propagation de l'Énergie Acoustique dans les Cristaux (Systèmes Cubique, Hexagonal et Quadratique)*

PAR A. LEVELUT

Laboratoire d'Ultrasons,† Faculté des Sciences, Tour 13, 9 quai Saint Bernard, 75-Paris 5e, France

(Reçu le 16 janvier 1969)

This paper is devoted to the study of the directions in a crystal along which the acoustical Poynting vector and the wave vector are parallel. Theorems relevant to all crystalline systems are demonstrated and all such directions are determined for cubic, hexagonal and tetragonal systems.

1. Introduction

Depuis quelques années, les expériences mettant en oeuvre des ondes élastiques dans la gamme de fréquence du gigahertz se sont multipliées (*Proc. I. E. E. E.*, 1965).

La plupart du temps, pour des raisons de commodité expérimentale, les cristaux utilisés, qu'il s'agisse des transducteurs ou des échantillons, sont taillés en forme de cylindres droits allongés. Il est donc nécessaire dans ces conditions, pour que le faisceau ultrasonore puisse se propager dans les cristaux, que l'énergie acoustique se propage parallèlement au vecteur d'onde qui est perpendiculaire aux faces terminales des cristaux. Dans la majorité des cas (les coupes AC du quartz faisant exception) on utilise des cristaux orientés selon un axe de haute symétrie. C'est-à-dire que le nombre de ces orientations peut être très limité dans le cas de cristaux de faible symétrie.

Le but de cet article est la recherche, pour un certain nombre de classes cristallines, de toutes les directions où la propagation de l'énergie de l'une au moins des trois ondes acoustiques s'effectue parallèlement au vecteur d'onde. Car, à côté des directions de haute symétrie, il en existe d'autres, satisfaisant à la condition requise, et qui ne peuvent être déterminées que par le calcul.

Le plan de cet article est le suivant: dans § 2, nous rappelons des généralités sur la propagation des ondes élastiques et nous montrons que les directions cherchées, coïncident avec les directions d'extremum de la vitesse de phase. Dans § 3, nous énonçons quelques théorèmes généraux sur le vecteur de Poynting acoustique. Dans § 4 nous indiquons le principe du calcul et dans § 5 nous donnons les résultats obtenus pour les systèmes cristallins cubique, hexagonal et quadratique. Les démonstrations sont reproduites en Appendices.

2. Propagation des ondes élastiques dans les cristaux

(1) *Les constantes élastiques et la matrice Γ* (Fedorov, 1968a; Farnel, 1961)

Dans un cristal, les tensions T_{ij} et les déformations ε_{kl} sont reliées par la loi de Hooke généralisée,

$$T_{ij} = \sum_{kl} c_{ij,kl} \varepsilon_{kl} . \quad (2-1)$$

Le tenseur des constantes élastiques $c_{ij,kl}$ est symétrique par rapport à la permutation des indices i et j d'une part, k et l d'autre part et des couples ij et kl enfin. Le nombre de ses composantes indépendantes dépend de la symétrie du cristal. La notation de Voigt peut être utilisée.

Le tenseur des déformations ε_{kl} est défini par

$$\varepsilon_{kl} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) , \quad (2-2)$$

où les u_k sont les composantes du déplacement.

Les équations du mouvement sont

$$\rho \ddot{u}_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} . \quad (2-3)$$

Si l'on suppose que les solutions de ces équations sont des ondes planes,

$$u_i = U_i \exp [i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] , \quad (2-4)$$

avec $\mathbf{q} = q\boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{\alpha}$ vecteur unitaire dont les composantes sont les cosinus directeurs de \mathbf{q}), il vient, en tenant compte des symétries de $c_{ij,kl}$:

$$\rho v^2 U_i = \sum_{kl} c_{ij,kl} \alpha_j \alpha_l U_k , \quad (2-5)$$

où $v = \omega/q$ est la vitesse de phase.

On pose:

$$\sum c_{ij,kl} \alpha_j \alpha_l = \Gamma_{ik} , \quad (2-6)$$

$$\rho v^2 = \lambda , \quad (2-7)$$

* Les recherches mentionnées dans la présent mémoire ont été effectuées avec l'aide d'un contrat de la D.G.R.S.T.

† Equipe associée au CNRS.

et les équations

$$\sum_k \Gamma_{ik} U_k = \lambda U_i \quad (2-8)$$

peuvent prendre la forme matricielle

$$\Gamma \mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}. \quad (2-8')$$

Les solutions de cette équation aux valeurs propres sont données par

$$\det|\Gamma - \lambda E| = f(\lambda) = 0, \quad (2-9)$$

où E est la matrice identité.

Les trois racines de cette équation, qui sont réelles car Γ est symétrique, donnent immédiatement les valeurs des vitesses de phase, v , des trois vibrations, orthogonales entre elles, qui sont les vecteurs propres.

(2) Les surfaces caractéristiques

Il existe plusieurs manières de représenter, à l'aide de surfaces dans l'espace à 3 dimensions, la propagation des ondes élastiques dans les cristaux (Musgrave, 1959); toutes ces surfaces ont trois nappes correspondant respectivement à l'onde quasi-longitudinale et aux deux ondes quasi-transversales.

On peut porter dans la direction du vecteur d'onde trois longueurs proportionnelles aux trois vitesses de phase; on obtient la surface des vitesses. On peut aussi porter dans la même direction des longueurs inversement proportionnelles aux vitesses: c'est la surface des indices.

Enfin, la surface d'onde représente le front d'une perturbation issue d'une source ponctuelle. C'est elle que l'on utilise dans la construction d'Huyghens; elle peut s'obtenir dans une transformation par polaires réciproques à partir de la surface des indices, qui elle-même peut être déduite par une inversion de la surface des vitesses. Toutes ces surfaces possèdent un centre de symétrie.

(3) Le vecteur de Poynting acoustique

Dans un milieu anisotrope la direction du vecteur d'onde n'est pas nécessairement celle de la propagation de l'énergie; celle-ci se propage dans la direction du rayon acoustique (exception faite pour les points coniques de la surface des vitesses, où le phénomène est plus complexe).

Tout comme en électromagnétisme, on définit un vecteur de Poynting \mathbf{P} , dont la direction est celle du rayon acoustique et dont le flux à travers une surface fermée donne la puissance émise par le volume limité par cette surface. A partir du vecteur de Poynting, on introduit la vitesse d'énergie \mathbf{V} qui est égale à la vitesse de groupe \mathbf{S} (Fedorov, 1968b). Les vecteurs \mathbf{P} , \mathbf{V} et \mathbf{S} sont colinéaires. Les directions que nous cherchons se caractérisent donc par la colinéarité du vecteur d'onde et de l'un quelconque de ces trois vecteurs.

La vitesse de groupe se calcule aisément par

$$S_j = \frac{1}{q} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_j} = \frac{1}{2q\omega} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial \alpha_j}, \quad (2-10)$$

avec

$$\omega^2 = \frac{q^2}{\rho} \sum_{ijkl} c_{ij,kl} \alpha_j \alpha_l \alpha_k \alpha_i, \quad (2-11)$$

où les α_i sont les cosinus directeurs de la vibration propre.

Il vient

$$S_j = \frac{v}{\lambda} \sum_{ikl} c_{ij,kl} \alpha_l \alpha_k \alpha_i. \quad (2-12)$$

Si la vitesse de groupe est parallèle au vecteur d'onde, on a

$$S_j = K \alpha_j, \text{ avec } K = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\alpha} = v = S,$$

ce qui montre que les trois vecteurs \mathbf{V} , \mathbf{S} et $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\alpha}$ sont alors identiques.

On en déduit la relation suivante, traduisant la colinéarité de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{ikl} c_{ij,kl} \alpha_l \alpha_k \alpha_i &= \lambda \alpha_j, \\ \sum_{jkl} c_{ij,kl} \alpha_j \alpha_l \alpha_k &= \lambda \alpha_i. \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

Cette expression, qui caractérise les directions cherchées, sera utilisée pour la démonstration des théorèmes; mais elle est mal adaptée à la détermination de ces directions. Nous allons montrer qu'il existe une autre voie d'approche.

La construction d'Huyghens donne la direction du vecteur vitesse de groupe \mathbf{S} : c'est la direction du point de contact de la surface d'onde avec le plan tangent perpendiculaire au vecteur d'onde. Ces deux directions ne sont confondues que si, et seulement si, le rayon vecteur du point de contact est perpendiculaire au plan tangent, autrement dit, si la surface d'onde présente un extremum. A cause des relations entre les différentes surfaces caractéristiques, on peut montrer qu'aux extrema de la surface d'onde correspondent les extrema de la surface des vitesses. Nous sommes donc ramenés au problème de la recherche des extrema de v (ou de $\lambda = \rho v^2$), ce qui est un problème de calcul des variations, plus facile à résoudre que le précédent.

(4) Les opérations de symétrie

Tout cristal est invariant dans un ensemble d'opérations de symétrie, qui forme un groupe, et qui caractérise la classe à laquelle le cristal appartient. Ces opérations déterminent le nombre de composantes indépendantes du tenseur élastique. Mais il se produit que des classes différentes, ayant des éléments de symétrie différents, ont des tenseurs élastiques identiques. Or c'est ce tenseur qui détermine, par l'intermédiaire des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice Γ , toutes les propriétés élastiques. Les classes possédant le même tenseur élastique sont donc équivalentes du point de vue de l'élasticité; et tout se passe comme si chacune de ces classes possédait, en plus des siens, les éléments de symétrie de toutes les autres. Ainsi, on peut supposer que toutes les classes du système

cubique ont les éléments de symétrie de l'holoédrie. Dans la suite, nous ne distinguerons pas les éléments de symétrie réels de ceux obtenus par ce moyen. Il va de soi que ceci n'est valable que pour les problèmes d'élasticité.

3. Théorèmes généraux

Il existe un certain nombre de théorèmes concernant la propagation de l'énergie acoustique dans le milieu cristallin. Ils fournissent des conditions suffisantes pour que le vecteur de Poynting soit parallèle au vecteur d'onde ou bien donnent des propriétés des directions où cette condition est réalisée. Nous en citons cinq: les deux premiers ont été démontrés par Waterman (1959); nous avons établi les trois autres.

Théorème I (Waterman)

Le vecteur de Poynting acoustique relatif à une onde longitudinale pure est parallèle au vecteur d'onde. Cette proposition a été énoncée sous une forme différente, mais équivalente, par Boccara & Zarembovitch (1963) qui ont fait intervenir les extrema de vitesse.

Théorème II (Waterman)

Le vecteur de Poynting acoustique relatif aux ondes transversales se propageant selon des axes de symétrie d'ordre deux, quatre et six, est parallèle au vecteur d'onde.

Théorème III

Si, pour un vecteur d'onde de direction \mathbf{a} la vibration propre \mathbf{a} est telle que l'on puisse passer de \mathbf{a} à \mathbf{a} par une opération de symétrie S , laissant invariant le tenseur élastique et possédant la propriété $S^2 = E$ (E est l'opération identité), le vecteur de Poynting acoustique \mathbf{P} relatif à la vibration \mathbf{a} est colinéaire à \mathbf{a} .

On sait que \mathbf{a} étant une vibration propre, $-\mathbf{a}$ l'est aussi; comme, d'autre part, toute opération antiunitaire est le produit d'une opération unitaire par une symétrie par rapport à un centre, il en résulte qu'il suffit de considérer des opérations S unitaires.

Nous avons donc:

$$\left. \begin{aligned} a_m &= \sum_t S_{mt} \alpha_t \\ \alpha_u &= \sum_m S_{um}^{-1} a_m \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

\mathbf{a} étant vibration propre, il vient

$$\sum_{jkl} c_{ij,kl} \alpha_j \alpha_l a_k = \lambda a_i \quad (3-2)$$

Les relations (3-1) donnent

$$\sum_{\substack{ijkl \\ pqr}} c_{ij,kl} S_{jp}^{-1} S_{iq}^{-1} S_{kr} a_p a_q \alpha_r = \lambda \sum_t S_{it} \alpha_t \quad (3-3)$$

et

$$\sum_{\substack{ijkl \\ pqr}} c_{ij,kl} S_{jp}^{-1} S_{iq}^{-1} S_{si}^{-1} S_{kr} a_p a_q \alpha_r = \lambda \alpha_s \quad (3-4)$$

La condition d'unitarité et la condition $S^2 = E$ s'écrivent respectivement:

$$S_{si}^{-1} = S_{is}; \quad (3-5)$$

$$S_{kr} = S_{kr}^{-1}. \quad (3-6)$$

Il vient

$$\sum_{pqr} \sum_{ijkl} c_{ij,kl} S_{is}^{-1} S_{jp}^{-1} S_{kr}^{-1} S_{iq}^{-1} a_p a_q \alpha_r = \lambda \alpha_s \quad (3-7)$$

Or, par hypothèse, nous avons

$$\sum_{ijkl} c_{ij,kl} S_{is}^{-1} S_{jp}^{-1} S_{kr}^{-1} S_{iq}^{-1} = c'_{sp,raq} = c_{sp,raq}, \quad (3-8)$$

d'où

$$\sum_{pqr} c_{sp,raq} a_p a_q \alpha_r = \lambda \alpha_s, \quad (3-9)$$

ce qui est précisément la condition de colinéarité de α et de \mathbf{P} .

Remarquons que, puisque $E^2 = E$, ce théorème contient le théorème I de Waterman.

Théorème IV

Soit \mathbf{a} une direction de vecteur d'onde telle que le vecteur de Poynting \mathbf{P} relatif à l'onde de polarisation \mathbf{a} et de vitesse de phase $v(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ soit colinéaire à \mathbf{a} . Alors, l'une des ondes ayant \mathbf{a} pour direction de vecteur d'onde possède les trois propriétés suivantes:

- son vecteur de polarisation est \mathbf{a} ;
- sa vitesse est $v(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = v(\mathbf{a}, \mathbf{a})$;
- son vecteur de Poynting est colinéaire à \mathbf{a} .

En effet, la vibration propre, \mathbf{a} , est définie par

$$\sum_{jkl} c_{ij,kl} \alpha_j \alpha_l a_k = \lambda a_i \quad (3-10)$$

et la valeur propre est

$$\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum_{ijkl} c_{ij,kl} \alpha_j \alpha_l a_k a_i = \sum_{ijkl} c_{ij,kl} a_j a_l \alpha_k \alpha_i \quad (3-11)$$

(La dernière égalité résulte des propriétés de symétrie du tenseur élastique.)

La condition de colinéarité de \mathbf{P} et du vecteur d'onde s'écrit

$$\sum_{jkl} c_{ij,kl} a_j a_l \alpha_k = \lambda' a_i \quad (3-12)$$

La condition à satisfaire pour que le vecteur \mathbf{a} soit une vibration propre relative à la direction \mathbf{a} s'obtient en remplaçant α_i par a_i , a_j par α_j et λ par λ' dans l'équation (3-10), ce qui donne

$$\sum_{jkl} c_{ij,kl} a_j a_l \alpha_k = \lambda' a_i, \quad (3-13)$$

avec

$$\lambda' = \sum_{ijkl} c_{ij,kl} a_j a_l \alpha_k \alpha_i = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{a}). \quad (3-14)$$

La comparaison de (3-14) avec (3-11) montre que $\lambda' = \lambda$ (ce qui entraîne l'égalité des vitesses). En con-

séquence, la condition (3-13) est identique à (3-12); elle est donc satisfaite. De la même façon, l'équation (3-10) assure que le vecteur \mathbf{P}' est colinéaire à \mathbf{a} .

Théorème V

Soient α une direction de vecteur d'onde et \mathbf{a} une des vibrations propres, dont la vitesse de phase est $v(\alpha, \mathbf{a})$. Si dans la direction α le vecteur α est vibration propre, les deux ondes ont les propriétés suivantes:

leurs vitesses de phase sont égales $v(\alpha, \mathbf{a}) = v(\mathbf{a}, \alpha)$;
leurs vecteurs de Poynting sont colinéaires aux vecteurs d'ondes.

En effet, la vibration propre \mathbf{a} est définie par (3-10) et la valeur propre $\lambda(\alpha, \mathbf{a})$ est donnée par (3-11). De la même manière la vibration α est caractérisée par (3-13) et sa valeur propre $\lambda(\mathbf{a}, \alpha)$ est donnée par (3-14). De l'équation (3-11) on déduit l'égalité des vitesses de phase. Enfin, les équations (3-12) et (3-10) assurent la colinéarité de chacun des vecteurs d'onde avec le vecteur de Poynting correspondant.

Applications

Le théorème I affirme que parmi les solutions que nous cherchons figurent toutes les directions où peuvent se propager des ondes longitudinales pures. Or ces directions ont été déterminées par Borgnis (1955) et Alexandrov (1956) pour un bon nombre de classes cristallines. Une partie des solutions est donc connue *a priori*.

Le théorème IV permet de relier les propriétés d'ondes élastiques se propageant dans des directions différentes; nous en donnons quelques exemples.

(1) Les ondes transversales se propageant selon un axe quaternaire ou sénaire sont pures et dégénérées et le vecteur de Poynting est colinéaire au vecteur d'onde (théorème II). Il en découle immédiatement que toutes les ondes dont le vecteur d'onde est perpendiculaire à l'axe en question et dont la polarisation lui est parallèle, ont même vitesse (pour le système hexagonal, ce résultat est trivial, comme nous le verrons plus loin).

(2) Les ondes transversales se propageant selon un axe binaire (pris comme axe Ox_1) de la classe 32 sont pures, non dégénérées et les deux vecteurs de Poynting sont dirigés selon Ox_1 . En conséquence, pour les ondes dont le vecteur d'onde est dans le plan x_2Ox_3 et dont la polarisation est parallèle à Ox_1 , il existe deux directions perpendiculaires où la vitesse est extrême et égale à celle des ondes se propageant selon Ox_1 (dans le quartz ces directions sont appelées *AC* et *BC*); et il y a seulement deux telles directions, sinon les ondes transversales selon Ox_1 seraient dégénérées.

Le théorème V est réciproque du théorème IV. Il faut noter que les directions α et \mathbf{a} , bien que jouant des rôles symétriques ne sont pas nécessairement homologues dans une opération de symétrie du cristal comme le montrent les exemples d'application du théorème IV; toutefois, cette éventualité peut se produire, ainsi qu'il ressort du théorème III.

4. Principe du calcul

L'équation aux valeurs propres s'écrit

$$f(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 \Delta_1 + \lambda \Delta_2 - \Delta_3 = 0.$$

Les coefficients Δ_n ($n=1, 2, 3$) sont égaux à la somme des mineurs principaux de rang n de la matrice Γ ; ils s'expriment en fonction des constantes élastiques et des cosinus directeurs du vecteur d'onde.

Pour plusieurs systèmes cristallins (cubique, hexagonal, quadratique et rhomboédrique), il est commode de repérer la direction du vecteur d'onde dans un système de coordonnées polaires sphériques: θ est l'angle du vecteur d'onde et de l'axe Ox_3 et φ est l'angle de sa projection sur le plan x_1Ox_2 avec l'axe Ox_1 .

On a donc

$$\Delta_n = \Delta_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \Delta_n(\theta, \varphi) \quad (n=1, 2, 3).$$

Nous cherchons les extréma des valeurs propres λ . Ils sont obtenus en écrivant que λ satisfait à l'équation $f(\lambda) = 0$ et aux deux équations dérivées:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= -\lambda^2 \frac{\partial \Delta_1}{\partial \varphi} + \lambda \frac{\partial \Delta_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Delta_3}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= -\lambda^2 \frac{\partial \Delta_1}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial \Delta_2}{\partial \theta} - \frac{\partial \Delta_3}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Mais pour les quatre systèmes mentionnés plus haut, Δ_1 , qui est égal à la trace de Γ , est indépendant de φ (Fedorov, 1968c); les équations dérivées deviennent:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= \lambda \frac{\partial \Delta_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Delta_3}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= -\lambda^2 \frac{\partial \Delta_1}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial \Delta_2}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta_3}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \right\}.$$

De plus, pour les systèmes cubique, hexagonal et quadratique, les Δ_n ne sont fonctions que de $\cos^2 \theta$ (ou $\sin^2 \theta$) et de $\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$; et les termes en $\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$, provenant de produits $\alpha_i^2 \alpha_j^2$, ont toujours $\sin^4 \theta$ en facteur. Il vient donc

$$\left. \begin{aligned} \sin^4 \theta \sin 4\varphi [\lambda - g(\theta, \varphi)] &= 0 \\ \sin \theta \cos \theta [\lambda^2 - \lambda h(\theta, \varphi) + l(\theta, \varphi)] &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Ces équations sont satisfaites simultanément dans les cas suivants:

- (1) $\theta = 0$;
- (2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = 0$ ou $\frac{\pi}{4}$;
- (3) $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\lambda = g\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right)$;
- (4) $\varphi = 0$ ou $\frac{\pi}{4}$ et $\lambda^2 - \lambda h(\theta, \varphi) + l(\theta, \varphi) = 0$;
- (5) $\lambda = g(\theta, \varphi)$ et $\lambda^2 - \lambda h(\theta, \varphi) + l(\theta, \varphi) = 0$.

En fait, cette méthode ne s'applique à la lettre que pour le système quadratique. En effet, pour le système hexagonal, les Δ_n sont tous indépendants de φ et la dérivée en φ est donc identiquement nulle; et, par suite d'une factorisation de $f(\lambda)=0$, l'équation dérivée en θ se ramène à une équation du premier degré en λ . D'autre part, pour le système cubique où les trois axes quaternaires jouent le même rôle, il est plus rapide de conserver les cosinus directs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et d'annuler simultanément les trois équations (non-indépendantes) suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \alpha_2 - \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \alpha_1 &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \alpha_3 - \frac{\partial f}{\partial \alpha_3} \alpha_2 &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_3} \alpha_1 - \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \right\} .$$

On peut également obtenir les solutions à partir de celles du système quadratique en introduisant des relations supplémentaires entre les constantes élastiques de ce dernier système.

5. Résultats

Dans cette section, nous donnons les résultats que nous avons obtenus dans l'étude des systèmes cubique, hexagonal et quadratique (les démonstrations peuvent être trouvées dans les Appendices). Ils sont présentés sous forme de tableaux indiquant les directions qui sont solutions, la (ou les) polarisation(s) correspondante(s) et le nombre de directions équivalentes. Les conventions suivantes sont admises:

$$h = \sqrt{\frac{A+C}{3A+5C}}$$

$$l = \sqrt{\frac{A+3C}{3A+5C}}$$

Directions
 Axes quaternaires [100]
 Axes ternaires [111]
 Axes binaires [110]
 Plans (001) ou directions $[\alpha_1\alpha_20]$
 Directions $[h, h, l]$

Tableau 1

Directions	Polarisation	Nombre de directions équivalentes
Axes quaternaires [100]	3 ondes pures	6
Axes ternaires [111]	Onde longitudinale	8
Axes binaires [110]	3 ondes pures	12
Plans (001) ou directions $[\alpha_1\alpha_20]$	Onde transversale de polarisation [001]	∞ (3 plans)
Directions $[h, h, l]$	Onde quasi-transversale	24

$(h, h, -l)$

Tableau 2

Directions
 $\theta=0$ axe senaire [001]
 $\theta=\pi/2$ plan (001) ou direction $[\alpha_1\alpha_20]$

$\theta = \theta_1 \quad \text{tg}^2 \theta_1 = \frac{c-r}{c+q}$

$\theta = \theta_2 \quad \text{tg}^2 \theta_2 = \frac{c+r}{c-q}$

Direction $[\alpha_1, \alpha_2, \cos \theta_2]$

Polarisations
 3 ondes pures
 3 ondes pures

Onde longitudinale

Onde quasi-transversale

$[\alpha_1, \alpha_2, -\cos \theta_2]$

Nombre de directions équivalentes
 2
 ∞

∞

∞

(1) les solutions α et $-\alpha$, qui apparaissent toujours ensemble en raison de la présence d'un centre de symétrie pour les surfaces caractéristiques, sont comptées pour deux directions;

(2) les solutions correspondent au cas général, c'est-à-dire qu'il n'est supposé aucunes relations entre les valeurs des constantes élastiques, autres que celles provenant de la symétrie; ainsi, par exemple, pour le cas cubique nous excluons la possibilité que $c_{11} - c_{12} = 2c_{44}$, c'est-à-dire que le cristal soit isotrope du point de vue de l'élasticité.

A. Système cubique

Les constantes élastiques, les mêmes pour toutes les classes de ce système, sont les suivantes (Nye, 1961):

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{vmatrix} . \quad (5-1)$$

Il est commode de poser:

$$c_{11} - c_{44} = A, \quad c_{44} = B, \quad c_{12} + c_{44} = C .$$

La matrice Γ s'écrit alors:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} A\alpha_1^2 + B & C\alpha_1\alpha_2 & C\alpha_1\alpha_3 \\ C\alpha_1\alpha_2 & A\alpha_2^2 + B & C\alpha_2\alpha_3 \\ C\alpha_1\alpha_3 & C\alpha_2\alpha_3 & A\alpha_3^2 + B \end{vmatrix} . \quad (5-2)$$

Les directions où l'une au moins des trois vitesses de phase est extrémale sont consignées dans le Tableau 1.

Évaluation numérique

La dernière direction dépend des valeurs numériques des constantes élastiques. Pour le fluorure de lithium, dont les constantes sont, en 10^{11} dyne.cm⁻² (Briscoe & Squire, 1957):

$$c_{11}=11,12, \quad c_{12}=14,20, \quad c_{44}=6,28,$$

l'angle θ vaut $41^\circ 40'$ et l'angle du vecteur d'onde et de la vibration, qui est égal à 2θ (ou $\pi - 2\theta$) vaut $83^\circ 20'$ (ou $96^\circ 40'$).

B. Système hexagonal

Comme pour le cas précédent, les constantes élastiques sont les mêmes pour toutes les classes du système hexagonal (Nye, 1961):

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{1}{2})(c_{11}-c_{12}) \end{vmatrix} \cdot \quad (5-3)$$

Il est bien connu (Fedorov, 1969c) qu'un axe senaire est un axe d'isotropie élastique; la surface des vitesses est de révolution autour de cet axe et tout plan le contenant est équivalent à un miroir. Il en résulte que, quelle que soit la direction du vecteur d'onde, il existe une onde transversale pure dont la polarisation est

perpendiculaire à l'axe d'ordre 6 et qui correspond à la valeur propre:

$$\lambda = (\frac{1}{2})(c_{11}-c_{12}) + [c_{44} - \frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})] \cos^2 \theta. \quad (5-4)$$

Si nous posons:

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2})(c_{11}-c_{12}) &= a, & c_{33}-c_{44} &= r, \\ c_{13}+c_{44} &= c, & c_{44}-c_{11} &= q, \end{aligned}$$

l'équation aux valeurs propres devient:

$$f(\lambda) = [\lambda - a - (c_{44} - a) \cos^2 \theta] g(\lambda) = 0, \quad (5-5)$$

avec

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \lambda^2 - \lambda[c_{11} + c_{44} + (q+r) \cos^2 \theta] \\ &+ (qr + c^2) \cos^4 \theta + (qc_{44} + rc_{11} - c^2) \cos^2 \theta + c_{11}c_{44}. \end{aligned} \quad (5-6)$$

Les directions où la vitesse de phase est extrémale sont données dans le Tableau 2. A cause de la symétrie du problème, les solutions engendrent des cônes, ayant pour axe l'axe senaire, que nous caractérisons par le demi-angle au sommet θ .

Évaluation numérique

Les valeurs numériques de θ sont: pour le cobalt, où (McSkimin, 1955):

$$\begin{aligned} c_{11} &= 30,7, & c_{33} &= 35,81, \\ c_{44} &= 7,53, & c_{13} &= 10,3; \\ \theta_1 &= 55^\circ 45' & \text{et} & \theta_2 = 46^\circ 40', \end{aligned}$$

tandis que pour le zinc, où (Wert & Tyndall, 1949):

Tableau 3

Directions	Polarisations	Nombre de directions équivalentes
Axe quaternaire [001]	3 ondes pures	2
Axes binaires [100]	3 ondes pures	4
Axes binaires [110]	3 ondes pures	4
Plan (001) ou direction $[\alpha_1, \alpha_2, 0]$	Onde transversale de polarisation [001]	∞ (1 plan)
$\theta = \theta_1 \quad \varphi = 0 \quad \text{tg}^2 \theta_1 = \frac{c-r}{c+q}$	Onde longitudinale	8
$\theta = \theta_2 \quad \varphi = 0 \quad \text{tg}^2 \theta_2 = \frac{c+r}{c-q}$	Onde quasi-transversale	8
$\theta = \theta_3 \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{tg}^2 \theta_3 = \frac{c-r}{c+(q-t/2)}$	Onde longitudinale	8
$\theta = \theta_4 \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{tg}^2 \theta_4 = \frac{c+r}{c-(q-t/2)}$	Onde quasi-transversale	8
$\theta = \theta_5 \quad \varphi = \varphi_5 \quad \text{tg}^2 \theta_5 = \frac{d^2}{nl} \quad \Phi_5 = \frac{c^2 n^2}{d^4}$	Onde transversale	16
$\theta = \theta_6 \quad \varphi = \varphi_6 \quad \text{tg}^2 \theta_6 = \frac{2d^2}{ml} \quad \Phi_6 = \frac{d^4 - c^2 m^2}{4d^4}$	Onde quasi-transversale	16

$$\begin{aligned} c_{11} &= 16,1, & c_{33} &= 6,10, \\ c_{44} &= 3,83, & c_{13} &= 5,01; \\ \theta_2 &= 36^\circ \text{ mais } \theta_1 \text{ n'existe pas.} \end{aligned}$$

C. *Système quadratique*

Pour les classes $4/mmm$, $\bar{4}2m$, $4mm$ et 422 , les constantes élastiques sont (Nye, 1961):

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{vmatrix}.$$

Pour les classes 4 , $\bar{4}$ et $4/m$ les constantes c_{16} et $c_{26} = -c_{16}$ sont en général non nulles. Mais on peut toujours (Fedorov, 1969c), par un choix convenable des axes Ox_1 et Ox_2 , qui ne sont imposés par aucune considération de symétrie, annuler la constante c_{16} . Le Tableau précédent est donc valable pour toutes les classes du système quadratique.

Les calculs sont facilités si l'on pose:

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2})(c_{11} - c_{12}) &= a, & c_{13} + c_{44} &= c, \\ c_{44} - c_{11} &= q, & c_{33} - c_{44} &= r, \\ c_{44} - c_{66} &= n, & c_{11} + c_{12} &= l, \\ 2c_{66} + c_{12} - c_{11} &= t, & 2c^2 - rl &= d^2, \\ 2c_{44} + c_{12} - c_{11} &= m = t + 2n = 2q + l; \\ \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi &= \Phi. \end{aligned}$$

Les résultats sont données dans le Tableau 3.

6. **Conclusion**

Nous avons déterminé, pour les systèmes cubique, hexagonal et quadratique toutes les directions où la vitesse de groupe, et par conséquent le vecteur de Poynting acoustique, sont parallèles à la vitesse de phase. La connaissance de ces conditions peut être utile pour les études effectuées au moyen d'ondes ultrasonores. Cependant, un certain nombre d'inconvénients sont attachés aux directions qui ne coïncident pas avec les axes de symétrie: les déformations correspondant à ces ondes ne sont pas simples et de plus ces directions, qui dépendent des constantes élastiques, varient avec la température (en particulier, pour les classes 4 , $\bar{4}$ et $4/m$ les directions faisant office d'axes binaires tournent autour de l'axe d'ordre 4). Toutefois, puisqu'il s'agit d'extréma, un écart à la direction théorique (dû à l'erreur sur la taille ou aux variations de température) n'entraîne que des déviations du second ordre.

Enfin, notons que nous nous sommes placés dans le cadre de la théorie habituelle de l'élasticité, c'est-à-dire à la limite des vecteurs d'onde infiniment petits.

Si l'on tient compte des effets de dispersion spatiale (Portigal & Burstein, 1968), certains résultats peuvent être qualitativement changés; ainsi les deux ondes transversales se propageant selon un axe ternaire peuvent être couplées, la dégénérescence est alors levée et la direction de propagation de l'énergie des deux vibrations propres, qui sont circulaires, est parallèle au vecteur d'onde.

APPENDICE A
Système cubique

Les mineurs principaux de la matrice Γ [équation (5-2)] sont:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A + 3B \\ A_2 &= (A - C)(A + C)(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) \\ &\quad + B(2A + 3B) \\ A_3 &= (A - C)^2(A + 2C)\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 + B^2(A + B) \\ &\quad + B(A - C)(A + C)(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) \end{aligned} \right\} \cdot (A-1)$$

L'une des équations à satisfaire pour obtenir les extréma s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \alpha_2 - \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \alpha_1 \\ = 2(A - C)\alpha_1\alpha_2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) [(\lambda - B)(A + C) \\ - (A - C)(A + 2C)\alpha_3^2] = 0, \end{aligned}$$

et les deux autres s'en déduisent par permutations circulaires sur les α_i .

Ces trois équations sont donc satisfaites, quels que soient les α_i , si $A = C$, c'est-à-dire si $c_{11} - c_{12} = 2c_{44}$. Ce résultat est bien naturel, puisque nous venons d'écrire la condition d'isotropie d'un cristal cubique. Dans la suite, nous supposons $A \neq C$.

Nous devons donc avoir simultanément:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1\alpha_2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) [(\lambda - B)(A + C) \\ - (A - C)(A + 2C)\alpha_3^2] = 0 \\ \alpha_2\alpha_3(\alpha_3^2 - \alpha_2^2) [(\lambda - B)(A + C) \\ - (A - C)(A + 2C)\alpha_1^2] = 0 \\ \alpha_3\alpha_1(\alpha_1^2 - \alpha_3^2) [(\lambda - B)(A + C) \\ - (A - C)(A + 2C)\alpha_2^2] = 0 \end{aligned} \right\} \cdot (A-2)$$

Nous allons classer les solutions selon le nombre de cosinus directeurs α_i nuls.

(1) *Deux α_i sont nuls*

Les trois équations (A-2) sont satisfaites; les axes quaternaires sont donc solutions et ceci est valable pour les trois ondes (théorèmes I et II).

(2) *Un seul des α_i est nul*

Supposons $\alpha_3=0$; les deux dernières conditions sont remplies et la première s'écrit

$$(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) (\lambda - B) (A + C) = 0.$$

Comme $A + C = c_{11} + c_{12} > 0$ [c'est une des conditions de stabilité du cristal cubique (Fedorov, 1969c)], les seules solutions sont

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \frac{1}{2} \text{ (direction [110] et homologues)}$$

$$\lambda = B = c_{44}.$$

Dans le premier cas les vitesses des trois ondes sont extrémales (théorèmes I et II) et dans le second, il s'agit de l'onde transversale pure dont la polarisation est parallèle à Ox_3 et ceci quels que soient α_1 et α_2 (cas prévu par le théorème IV).

(3) *Aucun des α_i n'est nul*

Les trois conditions deviennent:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) [(\lambda - B)(A + C) - (A - C)(A + 2C)\alpha_3^2] &= 0 \\ (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) [(\lambda - B)(A + C) - (A - C)(A + 2C)\alpha_1^2] &= 0 \\ (\alpha_1^2 - \alpha_3^2) [(\lambda - B)(A + C) - (A - C)(A + 2C)\alpha_2^2] &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Elles ne sont satisfaites que si l'une au moins des parenthèses est nulle. En effet, supposons qu'aucune d'entre elles n'est nulle. C'est donc que les trois expressions entre crochets sont nulles; or les conditions de stabilité du cristal (Fedorov, 1969c) imposent: $A + 2C = c_{11} + 2c_{12} + c_{44} > 0$. Il en découle que $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2$. Nous aboutissons donc à une absurdité.

Si deux des expressions entre parenthèses sont nulles, les trois le sont ($\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2$); la solution est la direction [111] mais dans ce cas, seule la vitesse de l'onde longitudinale est extrême (théorème I) car, pour les ondes transversales la surface des vitesses possède un point conique.

Supposons enfin qu'une seule des parenthèses est nulle: $\alpha_1^2 = \alpha_2^2$. La première condition est remplie et les deux autres deviennent identiques:

$$(\alpha_3^2 - \alpha_1^2) [(\lambda - B)(A + C) - (A - C)(A + 2C)\alpha_1^2] = 0.$$

Ceci est réalisé si

$$\alpha_3^2 = \alpha_1^2 = \alpha_2^2 \text{ (solution trouvée plus haut)}$$

ou

$$\lambda = B + \frac{(A - C)(A + 2C)}{A + C} \alpha_1^2.$$

Cette condition peut aussi s'écrire:

$$\lambda = B + \frac{(A - C)(A + 2C)}{2(A + C)} (1 - \alpha_3^2).$$

Nous déterminons α_3^2 en écrivant que λ est solution de l'équation aux valeurs propres $f(\lambda) = 0$; nous ne trouvons qu'une seule solution non nulle qui est:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3^2 &= \frac{A + 3C}{3A + 5C} = \cos^2 \theta \\ \alpha_1^2 = \alpha_2^2 &= \frac{A + C}{3A + 5C} = \left(\frac{1}{2}\right) \sin^2 \theta \end{aligned} \right\}.$$

Elle correspond à une onde quasi-transversale dont la polarisation située dans le plan défini par les axes [001] et [110] a ses composantes proportionnelles à:

$$\sqrt{A + C}, \sqrt{A + C}, -\sqrt{A + 3C}.$$

On passe donc du vecteur d'onde à la vibration par une rotation de π autour de [110] (cas prévu par le théorème III).

Cette solution, qui est la seule à dépendre explicitement des valeurs numériques des constantes élastiques, n'existe que si $\tan^2 \theta = 2(A + C)/(A + 3C)$ est positif. Or nous avons vu que $A + C > 0$; la condition d'existence est donc $A + 3C > 0$ ou $c_{11} + 3c_{12} + 2c_{44} > 0$ qui n'est pas imposée par des considérations de stabilité.

APPENDICE B

Système hexagonal

Les extréma de la valeur propre $\lambda = a + (c_{44} - a) \cos^2 \theta$ [équations (5-4) et (5-5)] se produisent pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.

Pour les deux autres valeurs propres, solutions de l'équation $g(\lambda) = 0$ [équation (5-6)], ils sont donnés par la condition $\partial g / \partial \theta = 0$ qui s'écrit

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = 2 \sin \theta \cos \theta [\lambda(q + r) - 2(qr + c^2) \cos^2 \theta - (qc_{44} + rc_{11} - c^2)] = 0.$$

Nous avons les solutions $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$. Dans ces deux directions, les trois vitesses sont extrémales car l'une correspond à l'axe senaire et l'autre, perpendiculaire à cet axe, est équivalente à un axe binaire (théorèmes I et II). Les autres solutions sont fournies par le système suivant:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(q + r) - 2(qr + c^2) \cos^2 \theta - (qc_{44} + rc_{11} - c^2) &= 0 \\ g(\lambda) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

La substitution de la première équation dans la seconde donne:

$$(qr + c^2) \{ [4c^2 - (q - r)^2] \cos^4 \theta - 2[2c^2 - q(q - r)] \cos^2 \theta + c^2 - q^2 \} = 0.$$

Si $qr + c^2 \neq 0$, le trinôme en $\cos^2 \theta$ donne les deux solutions:

$$\cos^2 \theta_1 = \frac{c+q}{2c+q-r} \quad \text{ou} \quad \text{tg}^2 \theta_1 = \frac{c-r}{c+q};$$

$$\cos^2 \theta_2 = \frac{c-q}{2c-q+r} \quad \text{ou} \quad \text{tg}^2 \theta_2 = \frac{c+r}{c-q},$$

qui définissent des cônes de révolution autour de Ox .
La première solution

$$\text{tg}^2 \theta_1 = \frac{c-r}{c+q} = \frac{2c_{44} + c_{13} - c_{33}}{2c_{44} + c_{13} - c_{11}}$$

correspond à une onde longitudinale pure (Borgnis, 1955) qui n'existe que si $c_{13} + 2c_{44} < c_{11}$, c_{33} ou $c_{13} + 2c_{44} > c_{11}$, c_{33} .

La seconde

$$\text{tg}^2 \theta_2 = \frac{c+r}{c-q} = \frac{c_{13} + c_{33}}{c_{13} + c_{11}}$$

correspond à une onde quasi-transversale; elle n'existe que si $-c_{13} < c_{11}$, c_{33} ou $-c_{13} > c_{11}$, c_{33} .

Examinons, pour ce système cristallin qui est assez simple du point de vue de l'élasticité, l'influence de relations supplémentaires entre les constantes élastiques.

(1) $qr + c^2 = 0$

Les trois racines de $f(\lambda) = 0$ sont:

$$\lambda = c_{11} + (q+r) \cos^2 \theta; \quad \lambda = c_{44};$$

$$\lambda = a + (c_{44} - a) \cos^2 \theta.$$

Une des nappes est sphérique; elle correspond à l'onde quasi-transversale. Pour les autres ondes, les racines sont extrémales pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.

(2) $r = c = -q$

Ces relations, appelées 'conditions de Green restreintes' (Borgnis, 1955) assurent l'existence, quel que soit α , d'une onde longitudinale pure (donc de trois ondes pures); il en découle que les racines sont:

$$\lambda = c_{11}; \quad \lambda = c_{44}; \quad \lambda = a + (c_{44} - a) \cos^2 \theta.$$

Deux des nappes sont sphériques.

(3) $r = c = -q$ et $a = c_{44}$

Ces relations entraînent l'isotropie élastique. Il vient:

$$\lambda = c_{11}; \quad \lambda = c_{44}; \quad \lambda = c_{44}.$$

Les trois nappes sont sphériques et deux d'entre elles sont dégénérées.

APPENDICE C Système quadratique

Les mineurs principaux de F s'écrivent:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= (c_{11} + c_{44} + c_{66}) + (q+r+n) \cos^2 \theta \\ \Delta_2 &= [rn + nq + qr + c^2 - tl\Phi] \cos^4 \theta \\ &\quad + [(r+n)c_{11} + (q+n)c_{44} + (q+r)c_{66} \\ &\quad - c^2 + 2tl\Phi] \cos^2 \theta \\ &\quad + [c_{11}c_{44} + c_{44}c_{66} + c_{66}c_{11} - tl\Phi] \\ \Delta_3 &= [(c^2 + rq)n + d^2t\Phi] \cos^6 \theta \\ &\quad + [rnc_{11} + nqc_{44} + qrc_{66} + c^2(c_{44} - 2n) \\ &\quad - (lc_{44} + 2d^2)t\Phi] \cos^4 \theta \\ &\quad + [nc_{11}c_{44} + qc_{44}c_{66} + rc_{66}c_{11} - c^2c_{66} \\ &\quad + (2lc_{44} + d^2)t\Phi] \cos^2 \theta \\ &\quad + [c_{11}c_{44}c_{66} - tlc_{44}\Phi] \end{aligned} \right\} \quad (C-1)$$

Les équations dérivées en φ et en θ de l'équation caractéristique sont respectivement:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\left(\frac{1}{2}\right) \sin 4\varphi \sin^4 \theta \, tl \left[\lambda - (c_{44} - \frac{d^2}{l} \cos^2 \theta) \right] = 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 2 \sin \theta \cos \theta \{ \lambda^2 (q+r+n) - \lambda [2(rn + nq + qr + c^2 - tl\Phi) \cos^2 \theta + (r+n)c_{11} + (q+n)c_{44} + (q+r)c_{66} - c^2 + 2tl\Phi] + 3[(c^2 + qr)n + d^2t\Phi] \cos^4 \theta + 2[rnc_{11} + nqc_{44} + qrc_{66} + c^2(c_{44} - 2n) - (lc_{44} + 2d^2)t\Phi] \cos^2 \theta + [nc_{11}c_{44} + qc_{44}c_{66} + rc_{66}c_{11} - c^2c_{66} + (2lc_{44} + d^2)t\Phi] \} = 0.$$

Ces deux équations sont satisfaites simultanément dans les cas suivants:

(a) $\theta = 0$

Direction [001] et les trois ondes sont de vitesse extrémale (théorèmes I et II).

(b) $\theta = \frac{\pi}{2}$ si $\lambda = c_{44}$

Ce qui est le cas pour l'onde transversale polarisée parallèlement à Ox_3 et ceci quel que soit le vecteur d'onde dans le plan (001) (d'après le théorème IV).

(c) $\sin 4\varphi = 0$

Au lieu d'utiliser les deux équations précédentes, il est, dans ce cas, plus rapide de reprendre le problème au départ car une des valeurs propres peut se calculer aisément. En effet, les plans tels que $\sin 4\varphi = 0$ c'est-à-dire les plans (010) et (110) sont des miroirs et il existe un vecteur propre qui leur est perpendiculaire. Examinons successivement les deux cas.

(α) $\varphi=0$

La valeur correspondant à la vibration transversale pure est

$$\lambda = c_{66} + n \cos^2 \theta$$

et il vient

$$f(\lambda) = [\lambda - (c_{66} + n \cos^2 \theta)] g(\lambda) = 0,$$

avec

$$g(\lambda) = \lambda^2 - \lambda [c_{11} + c_{44} + (q+r) \cos^2 \theta] + [(qr + c^2) \cos^4 \theta + (rc_{11} + qc_{44} - c^2) \cos^2 \theta + c_{11}c_{44}].$$

La valeur propre $\lambda = c_{66} + n \cos^2 \theta$ est extrémale pour $\theta=0$ et $\theta=\pi/2$. Quant à l'équation $g(\lambda)=0$, elle est identique à l'une de celles obtenues dans le cas hexagonal; si $qr + c^2 \neq 0$, les solutions sont:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \theta_1 &= \frac{c-r}{c+q}, & \operatorname{tg}^2 \theta_2 &= \frac{c+r}{c-q}, \\ \theta &= 0 \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(β) $\varphi=\pi/4$

La valeur propre qui correspond à l'onde transversale pure est

$$\lambda = a + (c_{44} - a) \cos^2 \theta = a + \frac{m}{2} \cos^2 \theta$$

et il vient

$$f(\lambda) = \left[\lambda - \left(a + \frac{m}{2} \cos^2 \theta \right) \right] h(\lambda) = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= \lambda^2 - \lambda [c_{44} + c_{66} + l/2 + (q+r+t/2) \cos^2 \theta] \\ &+ \left[\left(qr + c^2 - \frac{tr}{2} \right) \cos^4 \theta + \left(rc_{11} + qc_{44} - c^2 \right. \right. \\ &+ \left. \frac{tr}{2} + \frac{tc_{44}}{2} \right) \cos^2 \theta \\ &+ \left. \left(c_{11}c_{44} + \frac{tc_{44}}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Les extréma de $\lambda = a + (m/2) \cos^2 \theta$ ont lieu pour $\theta=0$ et $\theta=\pi/2$. Ceux des autres valeurs propres se produisent lorsque $\partial h / \partial \theta = 0$, soit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \theta} &= 2 \sin \theta \cos \theta \left\{ \lambda (q+r+t/2) - 2 \left(qr + c^2 - \frac{tr}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \cos^2 \theta \right. \\ &\quad \left. - \left(rc_{11} + qc_{44} - c^2 + \frac{tr}{2} + \frac{tc_{44}}{2} \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Les solutions sont tout d'abord $\theta=0$ (déjà rencontrée) et $\theta=\pi/2$ où les trois vitesses sont extrémales

(théorèmes I et II). Les autres sont données par la résolution du système suivant:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(q+r+t/2) - 2 \left(qr + c^2 - \frac{tr}{2} \right) \cos^2 \theta \\ - \left(rc_{11} + qc_{44} - c^2 + \frac{tr}{2} + \frac{tc_{44}}{2} \right) &= 0 \\ h(\lambda) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

La substitution de la première équation dans la seconde donne

$$\begin{aligned} \left(qr + c^2 - \frac{tr}{2} \right) \{ [4c^2 - (q-r-t/2)^2] \cos^4 \theta \\ - 2[2c^2 - (q-t/2)(q-r-t/2)] \cos^2 \theta \\ + [c^2 - (q-t/2)^2] &= 0, \end{aligned}$$

qui est formellement identique à l'équation homologue obtenue dans le cas $\varphi=0$: on passe de l'une à l'autre en remplaçant q par $q-t/2$.

Les solutions sont donc:

$$\operatorname{tg}^2 \theta_3 = \frac{c-r}{c+(q-t/2)} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}^2 \theta_4 = \frac{c+r}{c-(q-t/2)}.$$

La première correspond à une onde longitudinale pure (Borignis, 1955) et l'autre à une onde quasi-transversale.

(d)

Le dernier cas est celui où les deux conditions faisant intervenir explicitement λ sont satisfaites.

La substitution de la condition $\lambda = c_{44} - (d^2/l) \cos^2 \theta$ dans $f(\lambda)=0$ donne:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta \left\{ \left[\frac{d^6}{l^3} + \frac{d^4}{l^2} (q+r+n) + \frac{d^2}{l} (qr+rn+nq+c^2) \right. \right. \\ \left. \left. + n(c^2+qr) \right] \cos^4 \theta \right. \\ \left. - \left[\frac{d^4}{l^2} (q+n) + \frac{d^2}{l} (2qn+rq+nr+c^2) \right. \right. \\ \left. \left. + 2n(c^2+qr) \right] \cos^2 \theta \right. \\ \left. + n \left(c^2+qr + \frac{d^2}{l} q \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Les solutions sont:

$\cos^2 \theta = 0$ d'où $\lambda = c_{44}$ (solution déjà rencontrée);

$$\cos^2 \theta_5 = \frac{nl}{nl+d^2};$$

$$\cos^2 \theta_6 = \frac{ml}{ml+2d^2}.$$

La substitution de $\lambda = c_{44} - (d^2/l) \cos^2 \theta$ dans l'expression entre accolades de $\partial f / \partial \theta$ conduit à la relation:

$$\begin{aligned}
 -d^2 t \sin^4 \theta \Phi &= \left[\frac{d^4}{l^2} (n+q+r) + \frac{2d^2}{l} (qr+rn+nq \right. \\
 &+ c^2) + 3n(c^2+qr) \left. \right] \cos^4 \theta - \left[\frac{d^2}{l} (qr+rn+2nq+c^2) \right. \\
 &+ 4n(c^2+rq) \left. \right] \cos^2 \theta + n(c^2+rq); \\
 \text{avec } \cos^2 \theta &= \frac{nl}{nl+d^2} \text{ il vient } \Phi_5 = \frac{c^2 n^2}{d^4} \\
 \text{et avec } \cos^2 \theta &= \frac{ml}{ml+2d^2} \text{ on obtient } \Phi_6 = \frac{d^4 - c^2 m^2}{4d^4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\theta = \theta_1, \varphi = 0) &\rightarrow \operatorname{tg}^2 \theta_1 = 1 && \text{direction [101];} \\
 (\theta = \theta_2, \varphi = 0) &\rightarrow \operatorname{tg}^2 \theta_2 = 1 && \text{direction [101];} \\
 (\theta = \theta_3, \varphi = \frac{\pi}{4}) &\rightarrow \operatorname{tg}^2 \theta_3 = 2 && \text{direction [111];} \\
 (\theta = \theta_4, \varphi = \frac{\pi}{4}) &\operatorname{tg}^2 \theta_4 = \frac{2(C+A)}{3C+A}; \\
 (\theta = \theta_5, \varphi = \varphi_5) &\operatorname{tg}^2 \theta_5 = \infty, \varphi_5 = 0 && \text{direction [100];} \\
 (\theta = \theta_6, \varphi = \varphi_6) &\operatorname{tg}^2 \theta_6 = \frac{2(2C+A)}{C+A} && \text{direction} \\
 &&& \text{homologue à celle de } \theta_4.
 \end{aligned}$$

Enfin, pour $\varphi=0$ ou $\pi/2$, $\lambda = c_{66} + n \cos^2 \theta \rightarrow c_{44}$ plans (010) et (100).

Ces solutions peuvent être prévues à l'aide du théorème III: on passe des vecteurs d'ondes aux vibrations propres par rotation de π autour de [110] pour la solution $\cos^2 \theta = nl/(nl+d^2)$ et autour de [100] pour l'autre.

Pour chaque solution en $\cos^2 \theta$ (si elle existe), il y a 8 solutions en φ (si elles existent) et l'on peut passer de l'une à l'autre par les opérations du système quadratique.

Limite cubique

A partir des constantes du système quadratique, on obtient le cas cubique en faisant:

$$c_{33} = c_{11}, \quad c_{13} = c_{12}, \quad c_{66} = c_{44}.$$

Il en découle:

$$\begin{aligned}
 t = m = C - A, \quad d^2 &= (C - A)(2C + A), \\
 n = 0, \quad r = -q = A, \quad c &= C, \quad l = A + C.
 \end{aligned}$$

Pour les directions déterminées par des considérations géométriques il y a un seul changement: les axes binaires [100] deviennent quaternaires et il apparaît une dégénérescence pour les ondes transversales.

Pour les autres directions, qui dépendent des constantes élastiques on obtient:

Références

- ALEKSANDROV, K. S. (1956). *Soviet Phys. Cryst.* **1**, 104.
 BOCCARA, N. & ZAREMBOVITCH, A. (1963). *C. R. Acad. Sci. Paris*, **257**, 4167.
 BORGNIS, F. E. (1955). *Phys. Rev.* **98**, 1000.
 BRISCOE, C. V. & SQUIRE, C. F. (1957). *Phys. Rev.* **106**, 1175.
 FARNEL, G. W. (1961). *Canad. J. Phys.* **39**, 65.
 FEDOROV, F. I. (1968a). *Theory of Elastic Waves in Crystals*, Chap. 3. New York: Plenum Press.
 FEDOROV, F. I. (1968b). *Theory of Elastic Waves in Crystals*, Chap. 4. New York: Plenum Press.
 FEDOROV, F. I. (1968c). *Theory of Elastic Waves in Crystals*, Chap. 8. New York: Plenum Press.
 MCSKIMIN, H. J. (1955). *J. Appl. Phys.* **26**, 406.
 MUSGRAVE, M. J. P. (1959). *Rep. Progr. Phys.* **22**, 74.
 NYE, J. F. (1961). *Propriétés Physiques des Cristaux* (cf. Chap. 8). Paris: Dunod.
 PORTIGAL, D. R. & BURSTEIN, E. (1968). *Phys. Rev.* **170**, 673.
 WATERMAN, P. C. (1959). *Phys. Rev.* **113**, 1240.
 WERT, C. A. & TYNDALL, E. P. T. (1949). *J. Appl. Phys.* **20**, 587.
 Proc. I. E. E. E. (1965). Numéro spécial sur les ultrasons, **53**, (10).